**Міністерство освіти і науки України**

**Донбаська державна машинобудівна академія**

**Укладачі: І.С.Дмитришин**

**С.О.Колесников**

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

## до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни

«Методика навчання математики в профільних та спеціалізованих навчальних закладах»

для студентів спеціальності

014 «Середня освіта (Математика)»

Рекомендовано:
Вченою Радою факультету машинобудування
Протокол № 01-23/08 від «28» серпня 2023 р.

2023-2024 навчальний рік

**Міністерство освіти і науки України**

**Донбаська державна машинобудівна академія**

**Укладачі: І.С.Дмитришин**

**С.О.Колесников**

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

## до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни

«Методика навчання математики в профільних та спеціалізованих навчальних закладах»

для студентів спеціальності

014 «Середня освіта (Математика)»

Затверджено
на засіданні методичної ради
Протокол № 8 від 20.05.21

**Краматорськ 2021**

УДК 519.6
Г 37

**Рецензент:** Чумак О.О., канд. пед. наук, доцент кафедри Донбаської національної академії будівництва і архітектури, м. Краматорськ

**Дмитришин І.С., Колесников С.О.**
Г 37 Методика навчання математики в профільних та спеціалізованих навчальних закладах: Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи /І.С. Дмитришин, С.О. Колесников – Краматорськ : ДДМА, 2021. – 25 с.

Посібник з курсу «Методика навчання математики в профільних та спеціалізованих навчальних закладах» містить стислий теоретичний матеріал та супроводжується прикладами розв’язання типових завдань, містить завдання для самостійного виконання студентами. Може використовуватись як викладачами, так і студентами для самостійної роботи.

УДК 519.6

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Курс «Методика навчання математики в профільних та спеціалізованих навчальних закладах» є одним з фундаментальних курсів педагогічної математичної майстерності, що закладає фундамент методичної підготовки молодих викладачів. Головною метою курсу є формування основних видів діяльності викладача математики та економіки, що пов`язані з викладанням цих дисциплін.

Предметом діяльності викладача математики і економіки є, з одного боку, зміст навчальних предметів «Математика» та «Економіка», а з іншого боку – пізнавальна діяльність учнів і засоби її організації шляхом вивчення математики й економіки. Різноманітність виробничих функцій вчителя математики таекономіки складається з планувальної, організаційної, технологічної, діагностично-прогностичної, управлінської та соціальної функцій. Виконання їх зводиться до розвязання типових задач, які в свою чергу, передбачають оволодіння певними видами діяльності на певному рівні.

Основне завдання курсу полягає у формуванні у студентів уявлень про систему вказаних функцій і найважливіших видів діяльності, необхідних для виконання цих функцій. Таким чином, діяльнісний підхід є головним принципом викладання курсу.

# РОЗДІЛ 1

## ПРОФІЛЬНА ДИФЕРЕНЦІАЦІЯ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ іЕКОНОМІКИ У СТАРШІЙ ШКОЛІ

Метою індивідуального завдання є формування вмінь виконувати методичний аналіз навчального матеріалу теми, задавати на конструктивному рівні цілі вивчення всієї теми та цілі уроку, планувати вивчення теоретичного матеріалу за обраною темою, формувати методику вивчення математичних (економічних) понять та теорем, проектувати контроль знань та різноманітні видисамостійної та позакласної роботи учнів.

Виконання індивідуального завдання передбачає наступні розробки:

1. Постановка цілей навчання теми**.** При цьому необхідно скласти загальний опис цілей вивчення теми, сформувати перелік видів діяльності учнів за обраною темою через уміння та сформувати навички через систему вправ, які складаються з різнорівневих завдань за поданими вміннями.
2. Планування вивчення теоретичного матеріалу**.** При цьому треба зробити відбір та структурування понять та теорем, логічний аналіз означень, теорем, методів доведення та на цій основі скласти тематичне планування теми.
3. Методика формування поняття**.** Описати методику формування одного поняття з урахуванням наступних етапів: введення, засвоєння, застосування.
4. Методика вивчення теореми**.** Розробити методику вивчення теореми за основними етапами: введення, засвоєння, застосування.
5. Складання плану-конспекту одного з уроків за обраною темою.

| № | Теми для написання індивідуальної роботи |
|---|---|
| 1. | Лінійні рівняння з однією змінною |
| 2. | Цілі вирази |
| 3. | Функції |
| 4. | Системи лінійних рівнянь з двома змінними |
| 5. | Найпростіші геометричні фігури та їх властивості |
| 6. | Взаємне розташування прямих на площині |
| 7. | Трикутники |
| 8. | Коло і круг. Геометричні побудови |
| 9. | Раціональні вирази |
| 10. | Квадратичні корені. Дійсні числа |
| 11. | Квадратні рівняння |
| 12. | Чотирикутники |
| 13. | Подібність трикутників |
| 14. | Многокутники. Площі многокутників |
| 15. | Розв’язування прямокутних трикутників |
| 16. | Нерівності |

| | |
|---|---|
| 17. | Квадратична функція |
| 18. | Елементи прикладної математики |
| 19. | Числові послідовності |
| 20. | Розв’язування трикутників |
| 21. | Правильні многокутники |
| 22. | Декартові координати на площині |
| 23. | Геометричні перетворення |
| 24. | Вектори на площині |
| 25. | Початкові відомості з стереометрії |
| 26. | Функції, їхні властивості та графіки |
| 27. | Тригонометричні функції |
| 28. | Паралельність прямих і площин у просторі |
| 29. | Перпендикулярність прямих і площин у просторі |
| 30. | Похідна та її застосування |
| 31. | Показникова та логарифмічна функції |
| 32. | Елементи теорії ймовірності та математичної статистики |
| 33. | Вектори і координати |
| 34. | Геометричні тіла та поверхні |
| 35. | Інтеграл та його застосування |
| 36. | Рівняння, нерівності та їх системи |
| 37. | Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл |

Під час складання плану-конспекту уроку доцільно користуватись наступною схемою:

| **№** | **Етап уроку** | **Мета етапу** | **Прийоми і методи** |
|---|---|---|---|
| 1 | Вступна (організаційна частина) | Попередня організація классу, забезпечення психологічного настрою учнів на роботу | Привітання, перевірка присутності, готовності учнів до уроку |
| 2 | Мотивація навчальної діяльності | Формування у учнів позитивних мотивів, зацікавленості до вивчення нової теми | Проблемне навчання, проблемна ситуація, повідомлення значимості матеріалу, цікаві приклади. Організація процессу навчання, постановка завдань |
| 3 | Перевірка засвоєних раніше знань. Актуалізація опорних знань | Одержати уявлення про якість засвоєння матеріалу, викремити опорні знання | Усне опитування, письмове опитування, тестова бесіда |
| 4 | Повідомлення теми, мети і завдань уроку | Залучення учнів до цілеспрямованої, активної навчальної діяльності | Розповідь, проблемна ситуація, евристичне запитання, тощо |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | Вивчення нового матеріалу | Сприймання і осмислення учнями нового матеріалу | Словесні методи, наочні методи, практичні методи, самостійна робота учнів, поєднання різних методів |
| 6 | Узагальнення і систематизація знань (діагностування правильності засвоєних знань) | Вивчення послідовності і підпорядкованості вивчених на уроці і засвоєних раніше понять | Порівняння, зіставлення, перехід від одиничного до загального, складання систематизуючих таблиць, графіків, тощо |
| 7 | Застосування знань у стандартних і змінених умовах (закріплення нового матеріалу) | Якісне засвоєння учнями знань і способів виконання дій, формування первинних навичок | Система справ, самостійні тренувальні вправи |
| 8 | Підбиття підсумків уроку (рефлексія) | Зіставлення мети і завдань уроку з одержаними результатами. Оцінювання роботи классу і кожного учня | Розповідь, бесіда |
| 9 | Повідомлення домашнього завдання | | Пояснення змісту завдання, методики його викнання |

## РОЗДІЛ 2
## МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ОКРЕМИХ ТЕМ КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ НА РІЗНИХ НАПРЯМАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ

1. Функції в курсі алгебри і початків аналізу. Повторення і розширення відомостей про функції.
2. Властивості основних видів функцій: пряма пропорційність, обернена пропорційність, степенева функція.
3. Властивості основних видів функцій: квадратична, дробова функції.
4. Методика вивчення загально функціональних понять.
5. Формування світогляду учнів, реалізація міжпредметних зв’язків, прикладна спрямованість при вивченні функцій.
6. Методика вивчення тригонометричних функцій числового аргументу. Місце і роль теми в ШКМ.
7. Введення поняття «тригонометричні функції».

8. Вивчення властивості парності і періодичності тригонометричних функцій.
9. Побудова графіка тригонометричних функцій на прикладі *y=sin x*. Дослідження властивостей тригонометричних функцій.
10. Властивості і графіки функцій y=cos x, y=tg x, y=ctg x.
11. Методика вивчення показникової функції.
12. Методика вивчення логарифмічної функції. Поняття про обернену функцію.
13. Степенева функція в шкільному курсі алгебри і початків аналізу.
14. Методика вивчення тригонометричних рівнянь і нерівностей. Методичні особливості розв'язування рівнянь і нерівностей.
15. Найпростіші тригонометричні рівняння. Типи тригонометричних рівнянь та способи їх розв'язання.
16. Методика вивчення тригонометричних нерівностей.
17. Методика вивчення ірраціональних рівнянь що розв'язуються за означенням та за типами.
18. Методика вивчення ірраціональних нерівностей.
19. Методика вивчення показникових рівнянь.
20. Методика вивчення логарифмічних рівнянь.
21. Методика вивчення логарифмічних нерівностей.
22. Рівняння і нерівності з модулем.
23. Методика вивчення систем рівнянь. Методи розв`язання.

## ПРИКЛАД РОЗГОРНУТОЇ ВІДПОВІДІ НА ЗАПИТАННЯ
## Методи розв'ня систем рівнянь

***1. Метод підстановки та додавання.***

*Приклад 1.* Розв'язати систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x - 3y = -7, \\ 3x + 2y = 16. \end{cases}$$

*Обчислення.* Здійснимо лінійні перетворення: помножимо перше рівняння на -3, а друге на 4 і складаємо. Одержимо наслідок системи - рівносильне рівняння

$$17y = 85$$

Отримуємо $y = 5$ і після підстановки цього значення в перше рівняння системи відповідно отримуємо $x = 2$.

*Приклад 2.* Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 4 - x + y^2 = 0, \\ y^2 + y^3 = xy. \end{cases}$

*Обчислення.* Ці рівняння нелінійні. З першого рівняння за теоремою 3 знайдемо $x$: $x = 4 + y^2$ і підставимо в друге рівняння системы. Маємо $y^2 - 4y = 0$, його корені $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Відповідно, $x_1 = 4$, $x_2 = 20$.

*Відповідь:* $(4{,}0),(20;\ 4)$.

*Приклад 3.* Розв'язати систему трьох нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$$

*Обчислення.* З першого рівняння системи знайдемо $x$ і підставимо в друге і третє рівняння. Система набуде вигляду:

$$\begin{cases} x=2-y-z, \\ 2(2-y-z)+3y+z=1, \\ (2-y-z)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$$

Після виконання рівносильних перетворень маємо:

$$\begin{cases} x=2-y-z, \\ 3+y-z=0, \\ y^2-3z+z^2+yz=0. \end{cases}$$

Розв’яжемо окремо систему з другого та третього рівняння методом підстановки:

$$\begin{cases} z=y+3, \\ y^2+(y+3)^2-3(y+3)+y(y+3)=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y+3, \\ y^2+2y=0. \end{cases}$$

З другого рівняння $y_1=0$, $y_2=-2$. З першого рівняння знайдемо $z$: $z_1=3$, $z_2=1$; і з першого рівняння вихідної системи знаходимо $x$: $x_1=-1$, $x_2=3$.

*Відповідь:* $(-1;\ 0;\ 3)$; $(3;\ -2;\ 1)$.

***2. Метод заміни невідомих.***

*Приклад 4.* Розв'язати систему двох нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y^4}=\dfrac{15}{4}. \end{cases}$$

*Очислення.* Розглянемо нові змінні $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=u$, $\dfrac{1}{y^2}=v$, отримаємо

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{5}{2}, \\ u^2-v^2=\dfrac{15}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{5}{2}, \\ (u+v)(u-v)=\dfrac{15}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{5}{2}, \\ u-v=\dfrac{3}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2, \\ v=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Повертаємося до вихідних невідомимх $x$ та $y$ : $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=2, \\ \dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4}, \\ y^2=2. \end{cases}$

*Відповіді.* $\left(\dfrac{1}{4};\ -\sqrt{2}\right), \left(\dfrac{1}{4};\ \sqrt{2}\right)$

### *3. Застосування теореми Вієта до розв'язування систем двох рівнянь*

Якщо у системі рівняння подані у вигляді суми й добутку деяких змінних, то ці змінні є коренями зведеного квадратного рівняння, тобто для розв'язування цієї системи застосовуємо теорему Вієта.

*Приклад 5.* Розв'язати систему двох нелінійних рівнянь

*Обчислення.*

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=5, \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=4. \end{cases}$$

*Обчислення.* Після аналізу системи приходимо к висновку, що перше рівняння системи є сума змінних $(x+y)$ та $\dfrac{x}{y}:(x+y)+\dfrac{x}{y}=5,$ а друге рівняння добуток цих змінних: $(x+y)\dfrac{x}{y}=4.$ Отже за теоремою Вієта ці змінні є коренями квадратного рівняння $u^2-5u+4=0.$ Знайдемо його корені $u_1=4, u_2=1.$

Таким чином вихідна система рівносильна двом системам:

$$\begin{cases} x+y=4, \\ \dfrac{x}{y}=1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x+y=1, \\ \dfrac{x}{y}=4. \end{cases}$$

З першої системи х =у і у+у=4, 2у=4, $y_1=2, x_1=2.$

З другої системи х=4у і 4у+у=1, 5у=1, $y_2=\dfrac{1}{5}, x_2=\dfrac{4}{5}$

*Відповідь:*( 2;2 ); $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{5}\right).$

***4. Застосування попередніх перетворень до розв'язування систем двох рівнянь***

*Приклад 6.* Розв'язати систему двох нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18, \\ x \cdot y + x^2 + y^2 = 19; \end{cases}$$

Перше перетворення: почленно віднімаємз першого рівняння системи друге рівняння. Отримаємо

$$x + y - xy = -1$$

Друге перетворення: застосуємо формулу $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ до другого рівняння вихідної системи та запишемо нову систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y - xy = -1, \\ (x + y)^2 - xy = 19; \end{cases}$$

Вводимо нові змінні $u = (x + y)$, $v = xy$

$$\begin{cases} u - v = -1, \\ u^2 - v = 19; \end{cases}$$

Далі методом підстановки $v = u + 1$ знайдемо розв'язки $v_1 = 5$ , $v_2 = -4$

Таким чином, вихідна система рівнянь рівносильна системам

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = -3. \end{cases}$$

З першої системи рівнянь маємо розв'зки (2;3), (3;2).

З другої системи рівнянь маємо розв'зки: $(-2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7}); (-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7})$.

*Відповідь*: (2;3); (3;2); $(-2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7}); (-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7})$.

*Приклад 7.* Розв'язати систему двох нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y + 3xy = 13. \end{cases}$$

*Обчислення.* Нехай $x + y = u$ , $xy = v$, тоді $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$ .

Маємо наступну систему: $\begin{cases} u^2 - 2v = 10, \\ u + 3v = 13, \end{cases}$

Пропонується методом підстановки знайти самостійно

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u_1 = -\dfrac{14}{3}, \\ v_1 = \dfrac{53}{9},\end{cases} \\ \begin{cases}u_2 = 4, \\ v_2 = 3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Повертаємося до невідомих $x$ та $y$:

Перша система має вигляд

$$\begin{cases}x + y = -\dfrac{14}{3}, \\ xy = \dfrac{53}{9},\end{cases}$$

Перевірте самостійно, що вона розв'язків немає.

Друга система має вигляд

$$\begin{cases}x + y = 4, \\ xy = 3,\end{cases}$$

Вона має розв'язкі.

*Відповідь:* $(1;\ 3)$; $(3;\ 1)$.

**5. Розв'язування систем нелінійних рівнянь з двома змінними методом почленного ділення рівнянь системи**

*Приклад 8.* Розв'язати систему двох нелінійних рівнянь

$$\begin{cases}xy - x = 30, \\ xy^3 - xy^2 = 480\end{cases}$$

Здійснюємо перетворення

$$\begin{cases}xy - x = 30, \\ y^2(xy - x) = 480;\end{cases}$$

Почлено ділимо перше рівняння на друге

$$\begin{cases}xy - x = 30, \\ y^2 = 16;\end{cases}$$

Або

$$\begin{cases}xy - x = 30, \\ y = 4;\ y = -4.\end{cases}$$

*Відповідь:* $(10;\ 4)$; $(-6,-4)$.

### 6. Один спосіб приведення системи до відомих методів.

*Приклад 9.* Розв'язати систему двох нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 108, \\ xy + xz + yz = 108. \end{cases}$$

*Обчислення.*

Віднімемо від першого рівняння друге, помножимо обидва рівняння на 2 і виділимо в отриманому виразі повні квадрати $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0$, маємо, що $x = y = z$. З першого рівняня системы $x = y = z = 6$.

*Відповідь* $(6;\ 6;\ 6)$.

### Симетричні системи

Симетричною системою з двома змінними називається системиа в якій при заміні однієї зміної на іншу кожне рівняння системи не змінюється. Дивись *приклади* 5,6,7.

Для вирішення симетричних систем зручно приймати за нові невідомі симетричні многочлени $x + y = u$, $xy = v$ от від $x$ і $y$. Наведемо корисні формули:

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v,$$
$$x^3 + y^3 = u^3 - 3uv,$$
$$x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$

### Вправи

Знайти розв'язки систем

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = -\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 3\sqrt{xy}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7(x - y), \\ (x+1)(y+1) = 6. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2y^2 + 3xy = 2\left(\dfrac{x}{y} + 1\right), \\ 2x^2y^2 + 2xy = \dfrac{3x}{y} + 1. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + xy + y + 2x = 7, \\ y^2 + xy + x + 2y = 11. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x(2x+1)(3x+10y) = 144, \\ x^2 + 2x + 5y = 6. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2\left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}\right) - 9\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + 14 = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x^8 = x^4y^4 + 1, \\ 3y^8 = x^4y^4 + 2. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + xy = -1, \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3xy = 1. \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} - \dfrac{y^3}{x} = \dfrac{15}{2}, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 = 4, \\ x + y + x^2y + xy^2 = 4. \end{cases}$

14 $\begin{cases} x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2 = 21, \\ 2x^3 + 2y^3 + x^2y + xy^2 = 24. \end{cases}$

**Відповіді:**

**1)** $(2;\ -1)$;
**2)** $(1;\ 3)$; $(3;\ 1)$; $(-1;\ -3)$; $(-3;\ -1)$;
**3)** $(2;\ 3)$; $(3;\ 2)$;
**4)** $(1;\ 4)$; $(4;\ 1)$.
**5)** $(-1+\sqrt{6};\ -1+\sqrt{6})$; $(-1-\sqrt{6};\ -1-\sqrt{6})$; $(1;\ 2)$; $(2;\ 1)$;
**6)** $(1;\ 1)$; $(-1;\ -1)$; $\left(2\sqrt{13};\ \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$; $\left(-2\sqrt{13};\ -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$;
**7)** $(1;\ 2)$; $(-2{,}6;\ -3{,}4)$;
**8)** немає розв'язків;
**9)** $(\sqrt{2{,}5};\ \sqrt{2{,}5})$; $(-\sqrt{2{,}5};\ -\sqrt{2{,}5})$; $(2;\ 1)$; $(1;\ 2)$;
**10)** $(1;\ 1)$; $(-1;\ 1)$; $(1;\ -1)$; $(-1;\ -1)$;
**11)** $(1;\ 1)$;
**12)** $(1;\ -2)$; $(-1;\ 2)$; $(2;\ 1)$; $(-2;\ -1)$;
**13)** $(1;\ 1)$;
**14)** $(2;\ 1)$; $(1;\ 2)$

## РОЗДІЛ 3
## МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ У СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

1. Аксіоми стереометрії та їх наслідки. Методика вивчення аксіом.
2. Перші теореми стереометрії. Теорема про задання площини прямою і точкою.
3. Перші теореми стереометрії. Теорема про задання площини двома прямими, які перетинаються.
4. Взаємне розміщення прямих у просторі. Мимобіжні прямі.
5. Паралельні прямі у просторі: означення, ознаки, властивості.
6. Взаємне розміщення прямої і площини. Паралельність прямої і площини: означення, ознака, властивість.
7. Паралельність площин. Властивості паралельних площин.
8. Паралельне проектування. Властивості паралельного проектування. Зображення плоских геометричних фігур при паралельному проектуванні.
9. Кути і відстані у просторі. Перпендикулярні прямі.
10. Перпендикулярність прямої і площини. Похила до площини. Перпендикуляр і похила, проведені до площини з однієї точки. Теорема про три перпендикуляри.
11. Двогранний кут , кут між площинами. Перпендикулярність площин.

12.12.Властивості ортогонального проектування.

13. Двогранні і многогранні кути. Методика вивчення многогранників: поняття многогранника, види многранників.

14. Призма. Види призм. Пряма призма.

15.Паралелепіпед. Властивості паралелепіпеда.

16.Піраміда. Види пірамід. Характеристика пірамід першого та другого виду.

17.Піраміда. Характеристика пірамід третього виду.

18.Піраміда. Характеристика пірамід четвертого виду.

19.Правильна піраміда. Зрізана піраміда.

20. Правильні многогранники.

21. Поняття площі поверхні многорграника. Бічна та повна поверхня кожного виду многогранників.

22. Поняття об'єму. Об'єми многогранників.

23. Циліндр. Зображення циліндра. Властивості елементів циліндра. Переріз циліндра площиною.

24. Конус. Зображення конуса. Властивості елементів конуса. Переріз конуса площиною.

25. Куля. Елементи кулі. Частини кулі. Поняття площі поверхні та об'єму тіл обертання. Формули для обчислення об'ємів.

26. Комбінації круглих тіл і многогранників. Призма вписана в циліндр і описана навколо циліндра. Конус і піраміда.

27. Комбінація кулі із многогранником, конусом та циліндром.

## РОЗДІЛ 4

## ЗРАЗКИ ЗАВДАНЬ МОДУЛЬНИХ КОНТРОЛІВ

### № 1. Множини. Функції. Рівняння, нерівності, системи. Розв'язування задач.

Розділ «Множини. Операції над множинами»

Задача Д.54. Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:

1) $A = \left\{ x \mid x \in \frac{1}{2} - 2 = 0 \right\}$;

2) $B = \left\{ x \mid x \neq x \right\}$;

3) $A = \left\{ x \mid |x| \in Z, x \blacksquare 1 \right\}$;

5. Знайдіть обєднання множин A і B, якщо:

1) $A = \left\{ x \mid x^2 - 1 = 0 \right\}, B = \left\{ x \mid (x-1)(x-2) = 0 \right\}$;

2) $A = \left\{ x \mid 2x + 3 = 3 \right\}, B = \left\{ x \mid x^2 + 3 = 2 \right\}$;

3) $A = \left\{ x \mid x \in N, x \blacksquare 5 \right\}, B = \left\{ x \mid x \in N, x \blacksquare 7 \right\}$.

6. В олімпіаді взяли участь 46 учнів. Їм було запропонованорозв'язати 3

задачі. Після підведення підсумків зясувалася, що кожен з учасників розв'язав хоча б одну задачу. Першу і другу задачі розв'язали 11 учасників, другуі третю – 8 учасників, першу і третю – 5 учасників, а всі три задачі розв'язали тільки 2 учасники. Доведіть, що одну із задач розв'язали не менш ніж половина учасників.

**Розділ «Функції. Многочлени. Рівняння і нерівності».**

7. Функцію g задано описом: кожному натуральному числу поставлено у відповідність остачу від ділення цього числа на 4. Знайдіть g(3), g(0), g(14), g(32). Знайдіть E(g).

8. Функція $y=f(x)$ визначена на множині дійсних чисел і, є зростаючою і набуває лише додатніх значень. Доведіть, що функція $y=f^2(x)$ зростає на множині $R$;

9. Наведіть приклад двох зростаючих на множині M функцій,добуток яких не є зростаючою на цій множині функцією.

10. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(x^2-4x\right)\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+7x+10\right)\le 0$;
2) $\frac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-8)} \le 0$;
3) $\left|\frac{x+2}{x}\right|(x^2-4x-5) \le 0$;

**Розділ «Тригонометричні функції».**

11. Побудуйте графіки функцій та вкажіть нулі функції і проміжки знакосталості, проміжки зростання і спадання функцій:

1) $y=\cos x-|\cos x|$
2) $y=sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y=3cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$;
4) $y=tgx+|tgx|$;
5) $y=ctgx+ctg|x|$.

12. Доведіть тотожність:

1) $\frac{sin\alpha+sin\beta}{sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta}=\frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$;

2) $\frac{sin\alpha-cos\beta}{cos\alpha-sin\beta}=tg\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\frac{sin\alpha+sin3\alpha+sin5\alpha+sin7\alpha}{cos\alpha-cos3\alpha+cos5\alpha-cos7\alpha}=ctg2\alpha$

**Розділ «Степенева, показникова, логарифмічна функції».**

13. Розв'яжіть графічно рівняння й доведіть, що ці рівняння немають інших коренів, крім знайдених графічно:1) $x^2=6-x$; 2) $x^3=x^2$; 3) $x^2=2-x$;

4) $x^4=2x-1$.

14. Розташуйте числа в порядку іх зростання:1) $\log_2 3{,}5$; $\log_2 4{,}5$; $\log_2 1{,}3$; $\log_2 1{,}1$; $\log_2 2$; $\log_2 5$; 2) $log_{\frac{1}{4}}3$; $log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}$;0; $log_{\frac{1}{4}}4$;1; $log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{5}$.

15. При яких значеннях $\alpha$ нерівність $log_a\left(\frac{4+3|x|}{1+|x|}\right)+log_a\left(\frac{6+5|x|}{1+|x|}\right)>1$ виконується при всіх x?

16. При яких значеннях $\alpha$ нерівність $(sinx)^{lg(sinx)-\alpha^2}>10^{log_7\alpha+log_{100}(1-cos^2x)}>10$ при всіх допустимих значеннях x?

## *Задачі до теми «Мимобіжні прямі»*

*І. Початковий рівень*

17. Точка А не належить прямій а. Проведіть через точку А прямутак, щоб прямі а і b були мимобіжними

18. Прямі а і b мимобіжні. Як можуть бути розташовані прямі b і с,якщо прямі а і с:

А) Паралельні

В) Перетинаються

С) Мимобіжні

19. Прямі а і b мимобіжні. Як можуть бути розміщені пряма b іплощина $\alpha$ , якщо:

А) а і $\alpha$ паралельні

В) a і $\alpha$ перетинаються

20. Дано дві прямі у просторі, через які не можна провестиплощину. Чи перетинаються ці прямі?

*ІІ. Середній рівень*

21. Чи перетинаються прямі AM і BD, якщо точка D не лежить уплощині трикутника ABC, а точка M належить стороні BC?

22. Доведіть: яка б не була пряма, існує пряма, яка не лежить зданою в одній площині.

*ІІІ. Достатній рівень*

23. Доведіть, що коли прямі AB і CD – мимобіжні, то прямі AC і BD теж мимобіжні.

24. Пряма AB і точки C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AB і CD не перетинаються.

*ІV. Високий рівень*

25. Чи можна через точку C, яка не належить мимобіжним прямим a і b, провести дві різні прямі, кожна з яких перетинає прямі a і b?

## *Задачі до теми «Ознака паралельності прямої і площини»*

### *І. Початковий рівень*

25. Скільки прямих, паралельних даній площині, можна провести через точку, що не лежить у цій площині?

26. Чи можливо, щоб пряма a була НЕ паралельна площині $\alpha$ , але у площині $\alpha$ була пряма, паралельна до a?

27. Одна з сторін паралелограма належить площині $\alpha$ . Як розташовані по відношенню до площини $\alpha$ інші сторони паралелограма?

28. Сторона AB трикутника ABC належить площині $\alpha$ ($C\notin\alpha$ ). Як розташована по відношенню до площини $\alpha$ пряма, що проходить через середини

сторін AC і BC?

29. Через дану точку проведіть пряму, паралельну кожній з двох даних площин, які перетинаються

30. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.

*ІІ. Середній рівень*

31. Доведіть, що через будь-яку з двох паралельних прямихможна провести площину, паралельну другій прямій.

32Дано дві паралельні площини. Через точки A і B однієї зплощин проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину в точках $A_1$ і $B_1$. Чому дорівнює відрізок $A_1B_1$, якщо AB=a?

*ІІ. Достатній рівень*

33. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються по прямій а, перетинають площину $\alpha$ по паралельних прямих, то пряма а паралельна площині $\alpha$ .

34. Доведіть, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих можна провести площину, паралельну другій прямій.

*IV. Високий рівень*

35. Дано дві паралельні площини $\alpha$ і $\alpha$ і точка A, яка не лежить в жодній з цих площин. Через точку A проведено довільну пряму. Нехай $X_1$ і $X_2$ - точки перетину її з площинами $\alpha$ і $\alpha$ . Доведіть, що відношення довжин відрізків $AX_1$ $AX_2$ :не залежить від узятої прямої.

### ***Задачі до теми «Паралельні площини. Ознака паралельності площин»***

*I. Початковий рівень*

36. В площині $\alpha$ існує три прямі, паралельні площині $\beta$. Чиможна зробити висновок, що площини $\alpha$ і $\beta$ паралельні?

37. Чи можуть бути паралельними площини, які проходять черезне паралельні прямі?

38. Площини $\alpha$ і $\beta$ паралельні. Яким може бути взаємне розміщення прямої а і площини $\beta$, якщо:

А) а паралельна до $\alpha$,

Б) а перетинає $\alpha$,

В) а належить $\alpha$?

39. Пряма а паралельна до площини $\alpha$. Яким може бути взаємнерозміщення площин $\alpha$ і $\beta$, якщо:

А) а належить $\beta$,

Б) а перетинає $\beta$,

В) а паралельна до $\beta$?

40. Дано дві паралельні площини $\alpha$ і $\beta$ і точка А, яка не належить ні одній із них. Скільки існує:

А) прямих, що проходять через А і паралельні площинам $\alpha$ і $\beta$,

Б) площин, що проходять через А і паралельні площинам $\alpha$ і $\beta$?

*II. Середній рівень*

41. Доведіть, що через дві мимобіжні прямі можна провестипаралельні площини.

42. Дві сторони трикутника паралельні до деякої площини. Чипаралельна цій площині третя сторона трикутника?

43. Дано: SK = KA, SN = NC, SM = MB. Довести, що площинаKMN паралельна до площини ABC.

*III. Достатній рівень*

44. Площини $\alpha$ і $\beta$ паралельні площині $\gamma$. Чи можуть площини $\alpha$ і $\beta$ перетинатися?

45. Точка A лежить поза площиною $\alpha$, X – довільна точка площини $\alpha$, $X'$ – точка відрізка AX, яка ділить його у відношенні m : n. Доведіть, що геометричне місце точок $X'$ є площина, паралельна площині $\alpha$.

### *Задачі до теми «Перпендикулярні прямі»*

#### *I. Початковий рівень*

46. Назвати у навколишньому оточенні моделі прямих, які перпендикулярні між собою.

47. Прямі a і b перетинаються. Як можуть бути розміщені пряма bі площина $\alpha$, якщо:

А) a і $\alpha$ паралельні,

Б) a і $\alpha$ - перетинаються,

В) пряма a лежить у площині $\alpha$?

#### *II. Середній рівень*

48. Доведіть, що через будь-яку точку прямої у просторі можнапровести перпендикулярну до неї пряму.

49. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні. Знайдітьвідрізок CD, якщо AB= b, BC= a, AD= d.

#### *III. Достатній рівень*

50. Прямі AB, AC і ADпопарно перпендикулярні. Знайдітьвідрізок CD, якщо:

А) AB = 3см, BC = 7см, AD = 1,5см

Б) BD = 9см, BC = 16см, AD = 5см

В) AB = b, BC = a, AD = d

Г) BD = c, BC = a, AD = d.

*IV. Високий рівень*

51. Сторони чотирикутника ABCD і прямокутникавідповідно паралельні.

Доведіть, що ABCD – прямокутник.

## Піраміда. Розв'язування задач.

*1 варіант*

52. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут **β**. Визначити бічну поверхню піраміди,якщо радіус кола,вписаного в бічну грань,дорівнює **r**.

53.В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною ***в*** і кутом **β**при основі. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом **γ**. Визначити об'єм піраміди.

54. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом **α** при основі і радіусом вписаного кола **r**. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють **γ**. Визначити об'єм піраміди.

55.Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом ***в*** і прилеглим до нього гострим кутом **β**. Дві бічні, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя – нахилена до неї під кутом **α**. Визначити бічну поверхню піраміди.

56.Основою піраміди є правильний трикутник, площа якого дорівнює **S**. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до основи під кутом **α**. Визначити об'єм піраміди.

*2 варіант*

57.У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює **α**. Визначити бічну поверхню піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює **R**.

58.В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гострим кутом **α**. Основою висоти піраміди є середина гіпотенузи. Бічне ребро, що містить вершину прямого кута, дорівнює ***l***і нахилене до площини основи під кутом **γ**. Визначити об'єм піраміди.

59.В основі піраміди лежить ромб з тупим кутом **β** і висотою **h**. Усі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, утворюють з її висотою кут **γ**.

Визначити об'єм піраміди.

60.В основі піраміди лежить ромб зі стороною ***а***і тупим кутом **β**. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом **α**. Визначити бічну поверхню піраміди.

61.Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою ***а***і кутом **α** при вершині, протилежній основі. Бічна грань, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до основи під кутом **β**. Визначити бічну поверхню піраміди.

*3 варіант*

62.У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює **α**. Відрізок, що сполучає центр кола, описаного навколо бічної; з серединою бічного ребра цієї грані, дорівнює **d**. Визначити бічну поверхню піраміди.

63.В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною **c** і гострим кутом **α**. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом **γ**. Визначити об'єм піраміди.

64.Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою **c** і гострим кутом **α**. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють **γ**. Визначити об'єм піраміди.

65.В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом **β**при основі і радіусом вписаного кола **r**. Дві нерівні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя – нахилена до неї під кутом **α**. Визначити бічну поверхню піраміди.

66.Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою **c** і гострим кутом **α**. Бічна грань, що містить гіпотенузу, перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до основи під кутом **β**. Визначити об'єм піраміди.

*4 варіант*

67.У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює **b**, а плоский кут привершині - $\beta$ **.** Визначити повну поверхню піраміди.

68.В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник с кутом $\beta$ при основіірадіусом вписаного кола **r.** Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут$\gamma$ . Визначити об'єм піраміди.

69.Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом $\beta$ при вершині,протилежній основі, і радіусом описаного кола **R.** Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють $\gamma$ . Визначити об'єм піраміди.

70.Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою **c** і гострим кутом . Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя – нахилена до неї під кутом $\beta$ **.** Визначити бічну поверхню піраміди.

71.Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом $\beta$ **.** Висота цього трикутника, проведена до гіпотенузи – **h.** Бічна грань, що містить катет, прилеглий до заданого кута, перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені до площини основи під кутом . Визначити об'єм піраміди.

*5 варіант*

72.У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут $\alpha$ .Визначити повну поверхню піраміди, якщо її апофема дорівнює **a.**

73.Основою піраміди є прямокутник з кутом $\gamma$ між діагоналями. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють $l$ і нахилені до площини основи під кутом $\beta$ . Визначитиоб'єм піраміди.

74.Основою піраміди є ромб з більшою діагоналлю **d** і гострим кутом $\alpha$ . Усідвогранні кути при основі дорівнюють $\beta$ . Визначити об'єм піраміди.

75.В основі піраміди рівнобедрений трикутник з кутом $\alpha$ при вершині, протилежній основі, і радіусом описаного кола **R.** Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя – нахилена до неї під кутом $\beta$ . Визначити бічну поверхню піраміди.

76.Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною **b** і кутом $\beta$ при вершині, протилежній основі. Бічна грань піраміди, що містить бічну сторону цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інших – нахилені до основи під кутом $\alpha$ . Визначити об'єм піраміди.

## ЛІТЕРАТУРА:


1. Бевз Г.П. Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1989. – 352с.
2. Бевз Г.П. Методи навчання математики. – Х.: Вид. група «Основа», 2003. –96 с. – (Серія «Бібліотека журналу "Математика в школах України"»; Вип.4).
3. Бурда М.І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти //Педагогіка і психологія. – 1996. - №1. – С.40-45.
4. Дорофеев Г.В. Принципы отбора содержания обучения математике //Математика в школе. – 1990. - №6. – С. 27-34.
5. Методика викладання математики в середній школі / О.Я. Блох, Є.С. Канін, Н.Г. Килина та ін. Упоряд. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – Х.: Вид-во «Основа» приХарк. ун-ті, 1992. – 304 с.
6. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Вища школа, 2006. – 512с.


*Навчальне видання*

**ДМИТРИШИН ІРИНА СЕРГІЇВНА**
**КОЛЕСНИКОВ СЕРГІЙ ОЛЕКСІЙОВИЧ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**
**до практичних занять та самостійної роботи**

**з дисципліни**

«Методика навчання математики в профільних та спеціалізованих навчальних закладах»

для студентів спеціальності

014 «Середня освіта (Математика)»

Редагування, комп'ютерне верстання І. І. Дьякова

160/2019. Формат 60 х 84/16. Ум. друк. арк. 2,67.
Обл.-вид. арк. 1,12. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 1633 від 24.12.2003